第12卷 第1期
2007年1月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 12, No. 1
Jan., 2007

用于图像分割的活动轮廓模型综述

陈 波 赖剑煌

(中山大学数学与计算科学学院计算机视觉研究中心，广州 510275)

摘 要 图像分割和边界提取对于图像理解、图像分析、模式识别、计算机视觉等具有非常重要的意义，而活动轮廓模型(Active Contour Model)则是图像分割和边界提取的重要工具之一，它主要包括参数活动轮廓模型和几何活动轮廓模型两类。相对于参数活动轮廓模型，几何活动轮廓模型具有很多的优点，如计算的简单性和在变形的过程中能够处理曲线的拓扑变化，等等。近年来，几何活动轮廓模型在理论和应用方面的研究都有很大的发展，令人关注。为了使人们对这一技术有一概略了解，首先提出了一种新的分类方式用来描述参数活动轮廓模型、几何活动轮廓模型以及它们之间的联系，然后通过重点分析几个经典的活动轮廓模型及其算法实现来综述活动轮廓模型的研究、发展及其应用情况，最后指出了进一步进行活动轮廓模型理论与应用研究的方向。

关键词 图像分割 活动轮廓模型 变分方法 水平集方法 可加算子分裂算法

中图法分类号：TP391.41 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-8961(2007)01-0011-10

Active Contour Models on Image Segmentation: A Survey

CHEN Bo, LAI Jian-huang

(*School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-Sen university, Guangzhou* 510275)

Abstract Image segmentation and boundary extraction are very important in the fields of image understanding, image analysis, pattern recognition and computer vision et al, while active contour model is one of the most important tools in the areas of image segmentation and boundary extraction which mainly includes parametric active contour model and geometric active contour model. Geometric active contour model has many advantages over parametric active contour model, such as computational simplicity and the ability to change curve topology during deformation, et al. Therefore, significant advances have been made in theories and applications of geometric active contour model recently. In order to show the general idea of this technique, a novel classified mode is developed to describe the parametric active contour model, geometric active contour model and the relationship between them at first in this paper. Moreover, by analyzing several classical active contour models, this paper summarizes the research, development and applications of active contour model. Finally, this paper points out future research orientations on the theories and applications research of active contour model.

Keywords image segmentation, active contour model, variational calculus, level set methods, additive operator splitting (AOS) scheme

1 引 言

众所周知，图像分割和边界提取对于图像理解、图像分析、模式识别、计算机视觉等具有非常重要的意义。目前，这方面有很多成熟的算法，例如用边界梯度算子或者形态学算子等来进行图像分割和边界提取，而活动轮廓模型(active contour model)[1]的提出则是这一领域的一个重大突破。由于其具有计算的高效性、简单性及特别适用于建模以及提取任意形状的变形轮廓等优点，因此，近20年来，活动轮廓模型在边缘检测、医学图像分割以及运动跟踪中已经有了广泛的应用和很大的发展[2]，目前也是计算机视觉领域最活跃的研究主题之一。

基金项目：国家自然科学基金项目(60373082)；教育部科学技术重点项目(105134)

收稿日期：2005-08-31；**改回日期**：2006-03-10

第一作者简介：陈波(1979～)，男。2001年获得曲阜师范大学学士学位，2002年在中山大学数计学院攻读应用数学专业硕士学位，2004年硕博连读，攻读本专业的博士学位。研究方向为图像处理与模式识别。E-mail：cb622@163.com

同麻省理工学院人工智能实验室的 Marr 分层计算理论不同，Kass 等人认为，在很多的图像理解任务中，由于底层事件需依赖于高层知识，因此，他们提出了称为“Snake”的活动轮廓模型[1]，这是在图像力和外部约束力共同影响下的一条受控制的能量极小化的样条，其能量的大小取决于它的形状和它在图像中的位置，它是从初始位置出发，以最小化一些能量函数的方式向着物体的边界运动。这种半自动的方法可能归结为基于一些先验知识和用户交互的图像分割。在这些研究中已经产生了很多变形[3~5]。它们的区别主要在于应用曲线的类型、使用方式和图像能量项的选择等。主要表现为以下两种：

（1）参数活动轮廓模型，在这种模型中，曲线由一些规则排列的不连续的点（也称 snaxels）组成[1,6,7]或通过一些基函数，例如 B 样条[8,9]、Fourier 指数[10,11]等来被描述成一种连续的参数形式。

（2）几何活动轮廓模型，该模型是用曲线进化的思想和水平集的形式来描述曲线的进化[12~14]。

一般而言，参数活动轮廓模型中的平滑基函数比不连续的点需要的参数要少，从而可以产生更优的算法，而且由于曲线模型具有内在的规律性，所以不需要额外的约束去保证平滑性[9]。同时由于参数活动轮廓模型都是显式地描述曲线，因此很容易对 Snake 框架引入一个先验的形状约束[10]，也很容易地允许用户交互，例如允许用户指定曲线必须经过的点[1]。但是，这类模型通常只具备单目标轮廓分割能力，且在曲线演化的过程中，缺少应付拓扑变化的灵活性。几何活动轮廓模型由于采用了水平集方法而隐含有拓扑变化的能力，因而使得更为复杂结构的图像分割成为可能，但是因为它们发展的是一个曲面，而不是曲线，且描述是隐式的，所以计算比较复杂，很难给框架引入一个先验的形状约束[15]，可见两类模型各有千秋。

由于活动轮廓模型的重要性，Jain 着重综述了活动轮廓模型中的变形模板[3]，李培华着重综述了参数活动轮廓模型[2]，Mcinerney 着重综述了活动轮廓模型在医学图像处理中的应用[4]。他们的综述主要是对 1999 年以前工作的总结。2000 年以后，活动轮廓模型在理论和应用方面的研究都有了很大的发展，为了使广大相关科研人员对活动轮廓模型领域的研究现状有更加清晰明确的了解，本文将以分类的方式来描述参数活动轮廓模型、几何活动轮廓模型以及它们之间的联系，并重点回顾几何活动轮廓模型发展过程中的几个经典、重要的模型及其算法实现，最后指出了进一步进行活动轮廓模型理论与应用研究的方向。

2 参数活动轮廓模型

第 1 个活动轮廓模型由 Kass 在 1987 年提出，其基本的能量表达式[1,16]为

$$E = \int_0^1 \{E_{\text{int}}(\boldsymbol{X}(s)) + E_{\text{ext}}(\boldsymbol{X}(s))\}\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

其中，s 表示弧长参数，活动轮廓在图像中的位置可通过参数向量 $\boldsymbol{X}(s)=[x(s),y(s)]$ 表示，活动曲线本身的内部能量 E_{int} 使得活动曲线伸缩、弯曲，其一般定义为

$$E_{\text{int}}(\boldsymbol{X}(s)) = \frac{\alpha|\boldsymbol{X}'(s)|^2+\beta|\boldsymbol{X}''(s)|^2}{2}, s\in[0,1]$$

其中一阶微分 $\boldsymbol{X}'(s)$ 表达的是活动曲线长度的变化率，弹力系数 α 用于控制活动曲线以较快或者较慢的速度进行收缩；二阶微分 $\boldsymbol{X}''(s)$ 表达活动曲线曲率的变化率，强度系数 β 用于控制着活动曲线沿着法线的方向向目标变化的速度。通过恰当地调整弹力系数与强度系数，就可以使活动曲线在形变的过程中很好地保持其连续性与光滑性。

由于目标图像的性质而产生的外部能量 E_{ext} 使得活动曲线向着目标移动。当曲线到达目标（通常是边缘线）的时候，总体能量 E 应达到较小的值。对于一幅图像 $\boldsymbol{I}$，由于可认为它是关于位置变量(x,y)的连续函数，因此其外部能量函数 E_{ext} 一般可定义为以下几种形式：①如果一幅图像仅仅是由一些线条组成，则 $E_{\text{ext}}=-\boldsymbol{I}$；②对于有连续区域的图像，则图像中基于灰度的梯度向量场定义为 $E_{\text{ext}}=-|\nabla \boldsymbol{I}|^2$；③为了进一步扩展能量场的作用范围，有时候采用标准偏差为 σ 的 Gauss 函数来进行卷积低通滤波，即 $E_{\text{ext}}=-\boldsymbol{G}_\sigma * \nabla \boldsymbol{I}$。

上述基于能量函数最小化的变形轮廓线，称为参数活动轮廓模型（又叫 Snake 模型）。它作为一种全新的采用自上而下机制的图像目标提取方法，由于有效地利用了高级信息，从而提高了目标提取的速度和准确性，其已经在数字图像处理和计算机视觉领域得到了广泛的应用。如 Kass 等人最初提出来在时变图像中使用 Snake 模型来跟踪说话的唇动[1]；Cohen 等人于 1990 年将 Snake 模型推广用于 3 维重建、立体匹配等[17]。在基于活动轮廓模型跟

踪领域,统计模型得到了广泛的应用,其中较为常见的是卡尔曼蛇滤波模型,其主要用于解决线性、高斯问题,对于非线性、非高斯的情况,则可用粒子滤波和 Unscented Kalman 滤波来解决,其中粒子滤波被 Isard 引入到活动轮廓模型领域,即所谓 Condensation 算法,这种方法的不足是采样带来了巨大的时间消耗,为了改进这种情况,马波提出了基于隐马尔科夫模型的卡尔曼蛇跟踪算法[18],即用参数活动轮廓模型进行目标提取时,首先将一个初始化的主动轮廓放置在图像中感兴趣目标的周围,然后在图像作用力、轮廓曲线内部作用力以及外部约束的联合作用下,将该轮廓最终收敛到目标。同经典的方法相比,使用这种模型进行目标提取有以下诸多好处:

①图像数据、初始估计、目标轮廓及基于知识的约束可统一于一个特征提取过程中;

②由于融合了高级信息,即可在提取过程的开始就将注意力放在所希望提取的目标上,且尺度空间中由粗到细地极小化能量可以极大地扩展捕获区域和降低计算复杂性,因此可大量地减少计算量;

③由于使用这种模型可以消除所希望提取的目标上因纹理或噪声而造成的不连续,因此能得到完整的目标轮廓,而不会将目标分为几个小的区域;

④与传统的模板方法不同,这种模型由于不受目标形状的约束,就可以提取任意形状的目标,并且能够及时适应目标形状发生的变化,因此在目标追踪中有着极大的应用价值。

但是由于原始的主动轮廓模型自身的原因,致使其算法存在着以下许多问题:①对初始位置敏感,必须使初始轮廓接近真实的边界;②Snake 模型的非凸性将导致收敛到局部极值点,甚至发散;③不能处理曲线的拓扑变化;④解的最优性、计算的稳定性以及无法加入外部强约束等,因此在一定程度上限制了模型的应用范围。

自 Snake 模型提出的一段相当长的时间里,人们试图解决这些问题,例如对于第 1 个问题,可以通过改进图像力,增加外部能量的捕获区域来解决[17,19,20];针对第 2 个问题,也有很多方法,但是解决以后,又会产生另外的问题。如通过强制力虽可以使轮廓线向着凹处运动,但是所加的强制力必须很好地初始化,并且要忽略很强或者很弱的边缘[21]。应用梯度向量流场[6]虽可解决前面两个问题,但是仍然没有解决曲线的拓扑变化问题。对 Snake 模型的平滑性约束的改进,如果已知物体的先验形状信息,则可以发展成更为一般化的技术—变形模板[7]。相对于刚性模板来说,变形模板可使自己发生变形以匹配到显著的图像特征。从数学角度来看,这可以解释为有两项组成的目标函数,其中一项用于测量变形模板与理想轮廓的偏差,另一项用于衡量变形模板与相应的图像特征的匹配程度,这样,轮廓提取就变成了使目标函数最优化的问题。从统计学的观点,Storvik 提出了贝叶斯 Snake 模型[22],即将求取能量极小化的问题转化为求取最大后验概率的问题,并使用随机采样和模拟退火的方法来计算最大后验概率,其在医学图像的实验中获得了良好的结果。

从算法实现上来看,大体上可分为构造能量函数、推导欧拉方程、离散化和迭代求解 4 步。Kass 等最初是用变分法求出与能量函数对应的欧拉方程,再用有限差分方法来离散化偏微分方程式,其计算复杂度是 $O(n^3)$,其中,n 为离散点数(控制点数)。Cohen 等提出了 Snake 模型的有限元算法[17],有限元法又称为里兹法,它克服微分方程多数不能积分成初等函数的困难,是解变分问题的直接近似解法。对于参数活动轮廓模型的基本算法改进,在文献[2]中已经列出很多,在此不一一详述。

3　几何活动轮廓模型

与参数活动轮廓模型(parametric active contour model,或称 Snake)的基于能量函数的最小化不同,几何活动轮廓模型(geometric active contour model)是基于曲线进化理论和水平集的思想。其原理是先将平面闭合曲线隐含地表达为 2 维曲面函数(称为水平集函数)的水平集,即具有相同函数值的点集,再通过曲面的进化来隐含地求解曲线的进化。由于是采用水平集方法来进行数值计算,因此几何活动轮廓模型较好地克服了 Snake 模型的许多缺点,如可以处理曲线的拓扑变化、对初值位置不敏感、具有稳定唯一的数值解等。几何活动轮廓模型的这些良好特性已经引起了人们越来越多的关注,并已在图像处理和计算机视觉领域得到了广泛应用[12,13,23~28]。

3.1　几个经典模型的演化

下面主要简介 4 个经典模型及其演化,其中前 3 个是从欧拉方程的角度不断改进的模型,其一般是将大的图像梯度作为图像分割中的边缘算子,用

于控制演化曲线的停止，第 4 个模型是从能量函数的角度来考虑，更多地利用区域信息。

3.1.1 隐式几何活动轮廓模型

隐式几何活动轮廓模型(implicit geometric active contour model)[26]是最初传统的几何活动轮廓模型，这个模型给出了基于均值曲率运动的几何变形流，其定义为全局解，并且不依赖于参数的选择，它可通过水平集的数值计算方法来处理曲线的拓扑变化。它的欧拉方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=g(x,y)\,|\nabla \boldsymbol{\Phi}|\left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right)+k\right) & \text{在 } \boldsymbol{\Omega}\times\infty \text{ 上}\\ \boldsymbol{\Phi}(x,y,0)=\boldsymbol{\Phi}_0(x,y) & \text{在区域 } \boldsymbol{\Omega} \text{ 上}\end{cases} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi}(x,y)$为水平集函数(一般表示为符号距离函数)，其初始化为

$$\boldsymbol{\Phi}_0(x,y)=\begin{cases}\boldsymbol{d}((x,y),\boldsymbol{C}_0) & \text{若}(x,y)\text{在 } \boldsymbol{C}_0 \text{ 的内部；}\\ 0 & \text{若}(x,y)\text{在 } \boldsymbol{C}_0 \text{ 上；}\\ -\boldsymbol{d}((x,y),\boldsymbol{C}_0) & \text{若}(x,y)\text{在 } \boldsymbol{C} \text{ 的外部}\end{cases} \tag{3}$$

k 是一个常数项，$\boldsymbol{\Omega}$ 为图像区域，$\boldsymbol{C}_0$ 为初始化曲线，$\boldsymbol{d}$ 为距离函数，$\boldsymbol{g}:\boldsymbol{R}^2\rightarrow(0,1]$是一个正的单调下降并且趋于零的函数，用于控制水平集曲线向着图像特征(例如边界)运动，并最终停止，例如可以令 $\boldsymbol{g}=\dfrac{1}{1+|\nabla \boldsymbol{G}_\sigma * \boldsymbol{I}|}$(其中 $\boldsymbol{I}$ 为原图像，$\boldsymbol{G}_\sigma$ 为方差为 σ 的高斯函数，$*$ 表示卷积)。

3.1.2 隐式测地活动轮廓模型

传统模型在图像对比度很好时，虽可以获得满意的分割效果，但对于不连续的边缘则无能为力。隐式测地活动轮廓模型(implicit geodesic active contour model)[12]对其进行了改进，改进后的欧拉方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=|\nabla \boldsymbol{\Phi}|\left(\mathrm{div}\left(g\dfrac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right)+kg\right) & \text{在 } \boldsymbol{\Omega}\times\infty \text{ 上}\\ \boldsymbol{\Phi}(x,y,0)=\boldsymbol{\Phi}_0(x,y) & \text{在区域 } \boldsymbol{\Omega} \text{ 上}\end{cases} \tag{4}$$

3.1.3 统一模型

文献[28]中结合前面两种模型，给出了一种统一的模型(unified model)：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=\boldsymbol{a}|\nabla \boldsymbol{\Phi}|\left(\mathrm{div}\left(\boldsymbol{b}\dfrac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right)+\right. & \\ \left.|\nabla \boldsymbol{\Phi}|kg\right. & \text{在 } \boldsymbol{\Omega}\times\infty \text{ 上}\\ \boldsymbol{\Phi}(x,y,0)=\boldsymbol{\Phi}_0(x,y) & \text{在区域 } \boldsymbol{\Omega} \text{ 上}\end{cases} \tag{5}$$

显然，当上式中$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{1}\end{cases}$时，即为隐式几何活动轮廓模型，当$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{g}\end{cases}$时，即为隐式测地活动轮廓模型。特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=1,k=0$ 时，上式变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=|\nabla \boldsymbol{\Phi}|\,\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right) & \text{在 } \boldsymbol{\Omega}\times\infty \text{ 上}\\ \boldsymbol{\Phi}(x,y,0)=\boldsymbol{\Phi}_0(x,y) & \text{在区域 } \boldsymbol{\Omega} \text{ 上}\end{cases} \tag{6}$$

这是基本的散射方程，也称为均值曲率运动方程，它在图像分析中占有非常重要的地位。

3.1.4 基于 Mumford-Shah 最优分割模型的几何活动轮廓模型

由于实际图像中目标边缘经常是不连续的，故 Chan 和 Vese 提出了一种基于 Mumford-Shah 最优分割模型的几何活动轮廓模型[27]。该模型在处理弱边缘时取得了很好的效果。设闭合边界曲线 $\boldsymbol{C}$ 将图像 $\boldsymbol{I}$ 分为目标和背景两部分，定义

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{C},c_0,c_B)=&\mu L(\boldsymbol{C})+\nu S_0(\boldsymbol{C})+\\ &\lambda_0\int_{\mathrm{inside}(\boldsymbol{C})}|\boldsymbol{I}-c_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\ &\lambda_B\int_{\mathrm{outside}(\boldsymbol{C})}|\boldsymbol{I}-c_B|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$\mu,\nu\geqslant0,\lambda_0,\lambda_B>0$ 为各项权重系数，$L(C)$是闭合轮廓线 C 的长度，$S_0(\boldsymbol{C})$(下角 O 代表 object)是曲线 $\boldsymbol{C}$ 内部区域面积，c_0 为曲线 $\boldsymbol{C}$ 内部区域的平均灰度，c_B(下角 B 代表 back ground)为曲线 $\boldsymbol{C}$ 外部区域的平均灰度。

3.2 算法实现

对于这些模型的离散化迭代求解算法的研究也是几何活动轮廓模型的一个重要的领域。

3.2.1 一般散射方程

首先来考虑一个规范化后的简单的一般散射方程[24]的离散化，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=\mathrm{div}(\boldsymbol{g}(|\nabla \boldsymbol{\Phi}|)\nabla \boldsymbol{\Phi}),\text{在 } \boldsymbol{\Omega}\times\infty \text{ 上} \tag{8}$$

在算法实现时，令算子

$$\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})=\partial x_l(\boldsymbol{g}(|\nabla \boldsymbol{\Phi}^{(n)}|)\partial x_l)$$

则由定义知

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}&=\mathrm{div}(\boldsymbol{g}(|\nabla \boldsymbol{\Phi}|)\nabla \boldsymbol{\Phi})\\ &=\sum_{l=1}^{m}\partial x_l(\boldsymbol{g}(|\nabla \boldsymbol{\Phi}|)\partial x_l\boldsymbol{\Phi})\\ &=\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{9}$$

其中，m 是要考虑问题的维数，如当考虑 2 维图像时，$m=2$，$x_1=x$，$x_2=y$。

由上式很容易得出下面不同的迭代格式：

①显式（explicit scheme）的迭代格式 $\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)}=\left[\boldsymbol{E}+\tau\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})\right]\boldsymbol{\Phi}^{(n)}$，其中，$\boldsymbol{E}$ 为单位变换矩阵，τ 为离散数值计算时的时间步长，在这种格式中，为了能够收敛到一种稳定的状态，必须对时间步长 τ 进行限制；

②半隐式（semi-implicit scheme）的迭代格式 $\boldsymbol{\Phi}=\left[\boldsymbol{E}-\tau\sum_{l=1}^{m}\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}$，这一迭代格式虽是无条件稳定的，但是计算量太大；

③可加分裂算子格式 $\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)}=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}[\boldsymbol{E}-m\tau\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi})^{(n)}]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}$，由于可加分裂算子（additive operator splitting，AOS）[24,29]算法是一种快速、高效、无条件稳定的解决散射方程的数值方法，因此在活动轮廓模型中被广泛应用，其迭代格式也是无条件稳定的，由于它使用了解决了三对角矩阵问题的 Thomas 算法，因此它比第 2 种迭代格式至少快 10 倍，其迭代结果与第 2 种迭代格式相差 $O(\tau^m)$，其在 τ 很小时，可以忽略不计。特别地，在 2 维的情况下，其迭代格式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}[\boldsymbol{E}-2\tau\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}\tag{10}$$

3.2.2　一个完整的几何活动轮廓模型

下面分析一个完整具体的几何活动轮廓模型的水平集描述[29]：

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=\left(\alpha\mathrm{div}\left(\boldsymbol{g}(x,y)\frac{\nabla\boldsymbol{\Phi}}{|\nabla\boldsymbol{\Phi}|}\right)+\eta(\boldsymbol{\Phi},\nabla\boldsymbol{I})\right)|\nabla\boldsymbol{\Phi}|\tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是待分割图像，且

$$\eta(\boldsymbol{\Phi},\nabla\boldsymbol{I})=\mathrm{sgn}(\langle\nabla\boldsymbol{I},\nabla\boldsymbol{\Phi}\rangle)\Delta\boldsymbol{I}+\beta(c_B-c_O)\left(\boldsymbol{I}-\frac{c_B+c_O}{2}\right)$$

c_O 为曲线 $\boldsymbol{C}$ 内部区域的平均灰度，c_B 为曲线 $\boldsymbol{C}$ 外部区域的平均灰度。

令 $|\nabla\boldsymbol{\Phi}|=1$，则

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=\alpha\mathrm{div}(\boldsymbol{g}(x,y)\nabla\boldsymbol{\Phi})+\eta(\boldsymbol{\Phi},\nabla\boldsymbol{I})$$

$$=\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{g}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\Phi}\right)+\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{g}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\Phi}\right)+\eta(\boldsymbol{\Phi},\nabla\boldsymbol{I})\tag{12}$$

同前面一样，令

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{g}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\right),\boldsymbol{A}_2=\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{g}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

则 $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}=\alpha(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\Phi}+\eta(\boldsymbol{\Phi},\nabla\boldsymbol{I})$，离散化得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)}&=\boldsymbol{\Phi}^{(n)}+\tau(\alpha(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\Phi}^{(n)})+\tau\eta(\boldsymbol{\Phi}^{(n)},\nabla\boldsymbol{I})\\&=(\boldsymbol{E}+\tau\alpha(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2))\boldsymbol{\Phi}^{(n)}+\tau\eta(\boldsymbol{\Phi}^{(n)},\nabla\boldsymbol{I})\end{aligned}\tag{13}$$

为了构造一个无条件稳定的程序，文献[29]中应用 LOD（locally one-dimensional）程序进行迭代

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)}=\prod_{l=1}^{2}[\boldsymbol{E}-\tau\alpha\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})]^{-1}(\boldsymbol{\Phi}^{(n)}+\tau\eta(\boldsymbol{\Phi}^{(n)},\nabla\boldsymbol{I}))\tag{14}$$

事实上，应用 Taylor 展式可以得：

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{E}-\tau\boldsymbol{A}_1]^{-1}[\boldsymbol{E}-\tau\boldsymbol{A}_2]^{-1}(\boldsymbol{\Phi}+\tau\eta)\\&=(\boldsymbol{E}-\tau\boldsymbol{A}_1-\tau\boldsymbol{A}_2+O(\tau^2))^{-1}(\boldsymbol{\Phi}+\tau\eta)\\&=\boldsymbol{\Phi}+\tau(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{\Phi}+\tau\eta+O(\tau^2)\end{aligned}\tag{15}$$

即在 τ 很小时，由 LOD 格式与直接离散化得到的迭代格式是相差很小的。具体应用时，若将 $\boldsymbol{\Phi}$ 及 $\boldsymbol{g}$ 都进行列堆积变成为列向量，则得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{g}(x)\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\Phi}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{g}(x)\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{g}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{\Phi}\\&\approx\frac{1}{2}\left[\frac{(\boldsymbol{g}_{i+1}-\boldsymbol{g}_i)}{h}\frac{(\boldsymbol{\Phi}_{i+1}-\boldsymbol{\Phi}_i)}{h}+\frac{(\boldsymbol{g}_i-\boldsymbol{g}_{i-1})}{h}\frac{(\boldsymbol{\Phi}_i-\boldsymbol{\Phi}_{i-1})}{h}\right]+\\&\boldsymbol{g}_i\left[\frac{(\boldsymbol{\Phi}_{i+1}-\boldsymbol{\Phi}_i)-(\boldsymbol{\Phi}_i-\boldsymbol{\Phi}_{i-1})}{h^2}\right]\\&=\sum_{j\in N(i)}\frac{\boldsymbol{g}_j+\boldsymbol{g}_i}{2h^2}(\boldsymbol{\Phi}_j-\boldsymbol{\Phi}_i)\end{aligned}\tag{16}$$

其中，h 为迭代的网格步长，一般取 $h=1$，$\boldsymbol{A}_l$ 为三对角矩阵，其可以直接应用经典高效的 Thomas 算法进行处理。

3.2.3　统一模型

对于文献[28]中提出的统一模型，文中首先考虑在式(5)中 $k=0$ 时的情况，给出以下迭代公式

$$\boldsymbol{\Phi}_i^{(n+1)}=\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)}+\tau\left(\boldsymbol{a}_i|\nabla\boldsymbol{\Phi}|_i^{(n)}\sum_{j\in N(i)}\frac{\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\nabla\boldsymbol{\Phi}|}\right)_i^{(n)}+\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\nabla\boldsymbol{\Phi}|}\right)_j^{(n)}}{2}\frac{\boldsymbol{\Phi}_j^{(n+1)}-\boldsymbol{\Phi}_i^{(n+1)}}{h^2}\right)\tag{17}$$

其中，τ 为时间步长，h 为网格步长，$\boldsymbol{N}(i)$ 为像素位置 $\boldsymbol{x}_i$ 点的四邻域。为了避免 $|\nabla\boldsymbol{\Phi}|$ 在上面的四邻域中为零，可以应用调和平均的有限差分程序，即直接用调和对偶（harmonic counterpart）[30]来替代上式中的 $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\nabla\boldsymbol{\Phi}|}\right)_i^{(n)}+\left(\frac{\boldsymbol{b}}{|\nabla\boldsymbol{\Phi}|}\right)_j^{(n)}\right)$，得以下迭代格式：

$$\boldsymbol{\Phi}_i^{(n+1)} = \boldsymbol{\Phi}_i^{(n)} + \tau\left(\boldsymbol{a}_i \left|\nabla \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} \sum_{j\in N(i)} \frac{2}{\left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_i^{(n)} + \left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_j^{(n)}} \frac{\boldsymbol{\Phi}_j^{(n+1)} - \boldsymbol{\Phi}_i^{(n+1)}}{h^2}\right) \tag{18}$$

从矩阵向量的角度来考虑,可得以下半隐式的形式:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \boldsymbol{\Phi}^{(n)} + \tau\left(\sum_{l\in\{x,y\}} \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})\right)\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} \tag{19}$$

因此,其迭代格式为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \left[\boldsymbol{E} - \tau \sum_{l\in\{x,y\}} \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})\right]^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{(n)} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵。应用 AOS 算法[13]得

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{l\in\{x,y\}} [\boldsymbol{E} - 2\tau \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})]^{-1} \boldsymbol{\Phi}^{(n)} \tag{21}$$

具体地说,$\boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})$中的元素可由下面的式子给出:

$$a_{i,j} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i \left|\nabla \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} \dfrac{2}{\left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_i^{(n)} + \left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_j^{(n)}} & j \in \boldsymbol{N}_l(i) \\ -\boldsymbol{a}_i \left|\nabla \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} \displaystyle\sum_{m\in N_l(i)} \dfrac{2}{\left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_i^{(n)} + \left(\frac{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{b}}\right)_m^{(n)}} & j = i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{22}$$

其中 $N_l(i)$表示像素点关于 $l \in \{x,y\}$ 方向的邻域。显然由于其是关于三对角矩阵的求解,从而在计算的过程中,可以用 Thomas 算法来提高计算效率。

当 $k\neq 0$ 时,文献[31]给出解决$\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \pm\left|\nabla \boldsymbol{\Phi}\right|$的迎风算法(upwind scheme):

$$\left|\nabla \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} = \begin{cases} \left|\nabla^- \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} = [(\max(\boldsymbol{D}^{-x}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + \\ \quad (\min(\boldsymbol{D}^{+x}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + (\max(\boldsymbol{D}^{-y}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + \\ \quad (\min(\boldsymbol{D}^{+y}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{当 } k\leqslant 0 \text{ 时;} \\ \left|\nabla^+ \boldsymbol{\Phi}\right|_i^{(n)} = [(\min(\boldsymbol{D}^{-x}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + \\ \quad (\max(\boldsymbol{D}^{+x}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + (\min(\boldsymbol{D}^{-y}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2 + \\ \quad (\max(\boldsymbol{D}^{+y}\boldsymbol{\Phi}_i^{(n)},0))^2]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{当 } k>0 \text{ 时} \end{cases}$$

一般情况下,当取 $k\leqslant 0$,即可得到以下完整的形式:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{l\in\{x,y\}} [\boldsymbol{E} - 2\tau \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})]^{-1} \times (\boldsymbol{\Phi}^{(n)} + \tau\left|\nabla^- \boldsymbol{\Phi}\right|^{(n)} k\boldsymbol{g}) \tag{23}$$

其算法步骤可以归纳为以下 4 步:①首先计算 $\boldsymbol{U}^{(n)} = \boldsymbol{\Phi}^{(n)} + \tau\left|\nabla^- \boldsymbol{\Phi}\right|^{(n)} k\boldsymbol{g}$;②计算 x 方向的 3 对角系统 $(\boldsymbol{E} - 2\tau\boldsymbol{A}_x(\boldsymbol{\Phi}^{(n)}))\boldsymbol{V}^{(n+1)} = \boldsymbol{U}^{(n)}$ 得 $\boldsymbol{V}^{(n+1)}$;③计算 y 方向的 3 对角系统$(\boldsymbol{E} - 2\tau\boldsymbol{A}_y(\boldsymbol{\Phi}^{(n)}))\boldsymbol{W}^{(n+1)} = \boldsymbol{U}^{(n)}$得出 $\boldsymbol{W}^{(n+1)}$;④计算迭代$(n+1)$次水平集矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{V}^{(n+1)} + \boldsymbol{W}^{(n+1)})$,并判断是否收敛。事实上,前面的几种算法也可以归纳为这样的几个步骤。

3.2.4 基于 Mumford-Shah 最优分割模型的几何活动轮廓模型

Chan 和 Vese 指出,用欧拉-拉格朗日方法得出的用水平集矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示的基于 Mumford-Shah(缩写 MS)最优分割模型(即式(7))的求解如下:

$$c_0 = \frac{\int_\Omega I(x,y)H(\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_\Omega H(\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$c_B = \frac{\int_\Omega I(x,y)(1 - H(\boldsymbol{\Phi}))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_\Omega (1 - H(\boldsymbol{\Phi}))\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = \delta(t)\left[\mu \mathrm{div}\left(\frac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right) - \nu - \lambda_0(I(x,y) - c_0)^2 + \lambda_B(I(x,y) - c_B)^2\right] \tag{24}$$

其中 $H(z) = \begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}$,是 Heaviside 函数,而 $\delta(x)$则是 Dirac 函数。

由于 Dirac 函数 $\delta(x)$的定义范围狭窄,从而限制了图像边缘检测的全局性,李俊等用$|\nabla \boldsymbol{\Phi}|$代替 $\delta(x)$由于有更好的全局特性[32],因而有利于检测出远离曲线 $\boldsymbol{C}$ 的内外部边缘,同时还给出了更改后的有限差分迭代解

$$\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \boldsymbol{\Phi}^{(n)} - \Delta t[\max(F_{\mathrm{MS}},0)\nabla^+ + \min(F_{\mathrm{MS}},0)\nabla^- + \mu \boldsymbol{K}((\boldsymbol{D}^{0x})^2 + (\boldsymbol{D}^{0y})^2)^{1/2}] \tag{25}$$

其中,

$$\nabla^+ = [(\max(\boldsymbol{D}^{-x},0))^2 + (\min(\boldsymbol{D}^{+x},0))^2 + (\max(\boldsymbol{D}^{-y},0))^2 + (\min(\boldsymbol{D}^{+y},0))^2]^{1/2}$$

$$\nabla^- = [(\min(\boldsymbol{D}^{-x},0))^2 + (\max(\boldsymbol{D}^{+x},0))^2 + (\min(\boldsymbol{D}^{-y},0))^2 + (\max(\boldsymbol{D}^{+y},0))^2]^{1/2}$$

K 是水平集曲线在点 (i,j) 处的曲率,

$$F_{\mathrm{MS}} = -\nu - \lambda_0 (I(x,y) - c_0)^2 + \lambda_{\mathrm{B}}(I(x,y) - c_{\mathrm{B}})^2$$

由于其定义为全局解,且不能用 Sethian 提出的窄带(narrow band)快速步进方法(fast marching method)来求解,故计算量大,但一般情况下只需少数几次迭代就可以得到理想结果,真正影响速度的是每次演化后重新初始化为符号距离函数的计算量。

3.3 几何活动轮廓模型的应用

几何活动轮廓模型的应用与参数活动轮廓模型的应用类似,主要集中在边界提取、图像(主要是医学图像)分割、运动跟踪和目标定位等方面。如对显微图像[33]、多孔雷达图像[34]进行分割,可通过引入局部标准偏差[35],应用几何活动轮廓模型对 CR (computer radiography)数字胸片图像进行分割等。

Roman Goldenberg 等应用 $\mathrm{d}R^2 + \mathrm{d}G^2 + \mathrm{d}B^2$ 方向的最大变化代替灰度梯度来进行彩色图像边界提取[24],并且在 3 维希尔伯特空间应用 AOS 算法 $\boldsymbol{\Phi}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}[\boldsymbol{E} - 3\tau \boldsymbol{A}_l(\boldsymbol{\Phi}^{(n)})]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}$ 来对运动物体进行跟踪。Weickert 等也是应用 AOS 算法结合几何活动轮廓模型来快速高效地进行图像分割和运动追踪[28]。

应用基于 Mumford-Shah 最优分割模型的几何活动轮廓模[27]可以从噪声图像中准确提取出飞机的轮廓,并且能提取出梯度变化不很明显的轮廓,如宇宙星系图和夜间从太空中拍摄的遥感图。应用前面的 LOD 方法结合几何活动轮廓模型[29]也可以对图像去噪,并且可分割出其中的阿拉伯数字,对于没有进行光照均衡化的图像也能够很好地分割。有的可通过加入约束条件,如椭圆形约束 $\frac{(x-x_0)^2}{s^2} + \frac{(y-y_0)^2}{(\rho s)^2} = 1$ 来进行人脸轮廓的提取与跟踪[36]。

4 参数和几何活动轮廓模型的关系

传统的参数活动轮廓(或 Snake)模型可定义为一个能量最小化的样条。该样条是一个描述或者近似曲线或者曲面的多项式或多项式的集合。尽管组成样条的多项式的次数可以是任意的,但是习惯上,人们经常应用三次样条。因此,一个 2 维的曲线可以用以下方式近似:

$$x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$$

$$y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y$$

其中,$u \in [0,1]$ 为样条参数。尽管系数 a,b,c,d 可唯一地确定样条的形状,但是它们并不能预先给定,而是由一些约束条件,例如活动曲线的形状、图像中的位置、边界处的连续性等来约束。由牛顿定律可将参数活动轮廓模型简单表达为:$\gamma \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{int}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$,其中 γ 是一个非负的常数,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ 分别是内部和外部力。

这两种模型的相似性是显然的。事实上,由传统的参数活动轮廓模型(Snake 模型)还衍生出了很多几何活动轮廓模型,由于它们算法的实现过程都是先定义能量函数,然后用变分的方法求解对应的欧拉方程,最后再离散化、迭代求解,因此两者的界限并不是十分清晰,但相对于参数活动轮廓模型而言,几何活动轮廓模型具有很多的优点,如计算的简单性和在变形的过程中能够处理曲线的拓扑变化等,且近年来,几何活动轮廓模型飞速发展,本文这样分开阐述是试图全面、准确地报告出这一领域最近的研究与发展。文献[37]中给出了它们之间关系的精确描述,包括空间域变化系数、连续性、刚性和外部力量。

首先,强制力被从外部力量里面分离出来,因为它们需要特殊的数值算法;其次,仅仅考虑能量的法线方向的成分,由于切线方向的成分只是影响活动轮廓的参数,而不是它的几何拓扑,因此参数活动模型类可由下式给出:

$$\gamma \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = ((\boldsymbol{F}_{\mathrm{int}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{pres}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是向内的单位法向。文献[37]中还推导了它们的水平集描述。对于内部力,可分为弹性力(elastic)和刚性力(rigid):

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\mathrm{elastic}}(x) = \alpha(x)k(x) \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{rigid}}(x) = \beta(x)k^3(x) - \rho(x) \end{cases} \tag{27}$$

其中 $k(x)$ 为曲率,$\hat{k}(x) = \beta(x)k(x)$,

$$\rho(x) = \nabla\left\{\nabla\left[\beta(x)\left(\nabla \cdot \frac{\nabla \boldsymbol{\Phi}}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\right)\right] \cdot \frac{1}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)\right\} \cdot \frac{1}{|\nabla \boldsymbol{\Phi}|}\left(-\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 \hat{k}}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 \hat{k}}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \hat{k}}{\partial x \partial y}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right)^2} - \hat{k}\frac{\frac{\partial \hat{k}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{k}}{\partial y}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}}{\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

一般外部力被分为静态的和动态的两类。其中静态的是图像数据产生的向量流，而且当活动轮廓形变时，它不会发生变化。由于静态力定义在图像的空间位置，因此它的法向成分的水平集可描述为

$$F_{ext}(X(s))\cdot n(s) = -\frac{1}{|\nabla\Phi|}[F_{ext}(x)\cdot\nabla\Phi(x)]$$

而动态力则需依赖于活动轮廓的位置和变化方向。一般都要考虑空间变化强制力，其法向成分可以描述为

$$F_{pres}(s)\cdot n(s) = \omega_{pres}(x)$$

由于通过一个基本的曲线演化，$\frac{\partial X}{\partial t} = F(k(x))n$ 可以表示成水平集演化$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = F(k(x))|\nabla\Phi|$，因此可以产生一个一般的几何活动轮廓描述。综合应用上述几个式子可得

$$\gamma\Phi_t(x) = [\alpha(x)k(x) + \beta(x)k^3(x) - \rho(x)]|\nabla\Phi(x)| + \omega_{pres}(x)|\nabla\Phi(x)| - F_{ext}(x)\cdot\nabla\Phi(x) \quad (28)$$

这就是严格从标准的参数活动轮廓得出的一般几何活动轮廓模型，通过对上式中的 $\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\omega_{pres}(x)$，$F_{ext}(x)$ 赋以不同的值，即可以得到不同的几何活动轮廓模型形式。

5 未来的几个发展方向和趋势讨论

活动轮廓模型的提出给传统的计算机视觉理论及应用研究带来了新的观点和思维模式。从广义上讲，由于很多工作都属于基于偏微分方程的图像处理范畴[38,39]，尤其是对于椭圆型散射方程的应用[40]，因此很多研究工作都直接集中在偏微分方程模型的构造和数值解法及其应用上。

尽管活动轮廓模型的理论研究还很不完善，应用研究还刚刚起步，但是它所提出的新思想及其广泛的应用已经证明了它的价值[33~45]，笔者认为，应当从如下方面关注这一领域：

（1）应当进一步深入开展活动轮廓模型理论方面的研究。例如对传统参数活动轮廓模型的初始化、平滑性约束以及几何活动轮廓模型的构造及其算法实现的收敛速度和数值稳定性等。

（2）在具体的应用研究中，应主要考虑以下几方面：①模型的选择，对于不同的应用背景，根据它们各自的特点，应选择不同的模型和增加不同的先验约束条件[34~36]，并通过图像的最佳特征表述来实现分割是非常重要的；②多目标及彩色图像分割，由于活动轮廓模型自身的特点，在图像对比度良好和背景简单，且边界连续时的情况应用比较成熟，特别适合于医学图像处理[34,35]，但是在背景复杂的多目标分割中效果不佳。在彩色图像处理中，也可以先进行色彩聚类，然后再进行处理，如文献[45]中通过改进初值设置和外部函数，并用像素来加权 HIS 空间的欧氏距离，即

$$D_{i,j} = \mathrm{sqrt}((I_i - I_j)^2 + (S_i\cos H_i - S_j\cos H_j)^2 + (S_i\sin H_i - S_j\sin H_j)^2)$$

（其中 I_i、I_j、S_i、S_j、H_i、H_j 分别为 i，j 两种颜色的灰度、饱和度和色度）来近似图像梯度，效果不错，但在这些方面的研究工作还比较少；③活动轮廓模型与其他成熟技术的结合，以及现代边缘学科飞速发展，各个领域不同技术的结合应用显示了强大的威力，如小波域上图像非线性扩散滤波[40]、基于 HMM 的卡尔曼蛇跟踪[18]，又如统计模型与活动轮廓模型结合应用到雷达图像等的分割[34,44]、贝叶斯理论用于随机采样和模拟退火的活动轮廓[22]等。事实上，随着不同学科的发展，活动轮廓模型本身也是很多领域综合考虑的产物，如文献[33]中将测地轮廓模型与梯度向量流结合起来，产生了 NGVF（normal gradient vector flow）：$\frac{\partial C(p)}{\partial t} = ([\hat{u},\hat{v}](p)\cdot N(p))N(p)$，并用水平集和 AOS 算法计算来快速稳定地收敛。

6 结　语

活动轮廓模型由于其自身的特点，如特别适用于建模和提取任意形状的变形轮廓等，近20年来已经有了广泛的应用和很大的发展，目前也成了计算机视觉领域最活跃的研究主题之一。它在医学图像处理、图像分割、运动跟踪等方面的应用前景已引起了广大科研人员的浓厚兴趣。近来的技术发展更是证明了它的模型有效性和数值计算的简单高效性。本文以分类的方式来描述参数、几何活动轮廓模型以及它们之间的联系。本文重点回顾了它们，尤其对几何活动轮廓模型，其发展过程中的几个经典、重要的模型及其算法实现进行了回顾；最后，对于研究的难点和未来的发展趋势也进行了分析。希望能对相关领域的研究人员和工程技术人员有所裨益。

参考文献(References)

1 Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour odels [J]. International Journal of Computer Vision, 1987, **1**(4): 321 ~ 331.

2 Li Pei-hua, Zhang Tian-wen. Review on active contour model(Snake model)[J]. Journal of Software, 2000, **11**(6): 751 ~ 757. [李培华,张田文. 主动轮廓线模型(蛇模型)综述[J]. 软件学报, 2000, **11**(6): 751 ~ 757.]

3 Jain A K, Zhong Y, Jolly M P D. Deformable template models: A review[J]. Signal Processing, 1998, **71**(2):109 ~ 129.

4 Mcinerney T, Terzopoulos D. Deformable models in medical image analysis: A survey[J]. Medical Image Analysis, 1996, **1**(2): 91 ~ 108.

5 Jacob M, Blu T, Unser M. Efficient energies and algorithms for parametric Snakes[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, **13**(9): 1231 ~ 1244.

6 Xu C, Prince J L. Snakes, shapes, and gradient vector flow[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3):359 ~ 369.

7 Gao J, Kosaka A, Kak A. A deformable model for human organ extraction[A]. In: Proceedings of International Conference on Image Processing[C], Chicago, IL, USA, 1998: 323 ~ 327.

8 Menet S, Saint-Mark P, Medioni G. B-Snakes: Implementation and application to stereo[A]. In: Proceedings of Image Understanding Workshop[C], Pittsburgh, Penn, USA, 1990: 720 ~ 726.

9 Brigger P, Hoeg J, Unser M. B-spline snakes: A flexible tool for parametric contour detection [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, **9**(9):1484 ~ 1496.

10 Staib L H, Duncan J S. Boundary fitting with parametrically deformable models[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, **14**(11):1061 ~ 1075.

11 Chakraborthy A, Staib L H, Duncan J S. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1996, **15**(6):859 ~ 870.

12 Casselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours[A]. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision[C], Boston, MA, USA, 1995: 694 ~ 699.

13 Malladi R, Sethian J A, Vemuri B C. Shape modeling with front propagation: A level set approach[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, **17**(2):158 ~ 174.

14 Sapiro G. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis [M],Cambridge, U K: Cambridge University Press, 2001.

15 Leventon M E, Grimson W E L, Faugeras O. Statistical shape influence in geodesic active contours[A]. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C], Hilton Head Islands, South California, USA, 2000, **1**: 316 ~ 323.

16 Jiang X Y, Zhao R C. Image segmentation with an improved active contour[J]. Journal of Image and Graphics, 2004, **9**(9):1019 ~ 1024. [蒋晓悦,赵荣椿.一种改进的活动轮廓图像分割技术[J]. 中国图象图形学报, 2004, **9**(9):1019 ~ 1024.]

17 Cohen L D. On active contour models and balloons[J]. CVGIP: Image Understanding, 1991, **53**(2): 211 ~ 218.

18 Ma Bo, Zhang Tian-wen, Li Pei-hua. HMM-based Kalman snake for contour tracking[J]. Journal of Computer-aided Design and Computer Graphics, 2003, **15**(10):1236 ~ 1241. [马波,张田文,李培华. 基于 HMM 的卡尔曼蛇跟踪[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003,**15**(10):1236 ~ 1241.]

19 Cohen L D, Cohen I. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, **15**(11): 1131 ~ 1147.

20 Leroy B, Herlin I, Cohen L D. Multiresolution algorithms for active contour models[A]. In: proceedings of 12th International Conference on Analysis and Optimization of Systems[C], Paris, France, 1996: 58 ~ 65.

21 Tek H, Kimia B B. Image segmentation by reaction-diffusion bubbles [A]. In: Proceedings of Fifth International Conference on Computer Vision[C], Boston, Massachusetts, USA ,1995:156 ~ 162.

22 Storvik G. A Bayesian approach to dynamic contours through stochastic sampling and simulated Annealing[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1994, **16**(10): 970 ~ 986.

23 Yezzi A, Kichenassamy S, Kumar A, *et al.* A geometric snake model for segmentation of medical imagery[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1997, **16**(2):199 ~ 209.

24 Roman Goldenberg, Ron Kimmel, Ehud Rivlin, *et al.* Fast geodesic active contours[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**(10):1467 ~ 1475.

25 Adalsteinsson D, Sethian J. A fast level set method for propagating interfaces[J]. Journal of Computational Physics, 1995, **118**(2): 269 ~ 277.

26 Caselles V, Catte F, Coll B, *et al.* A geometric model for active contours in image processing[J]. Numeric Mathematic, 1993, **66**(1):1 ~ 31.

27 Chan T F, Vese L A. Active contour model without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**(2):266 ~ 277.

28 Kühne G, Weickert J. Fast methods for implicit active contour models [A]. In: S. Osher, N. Paragios, eds., Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics[M], Berlin: Springer Verlag, 2003.

29 Kimmel R. Fast edge integration[A]. In: S. Osher, N. Paragios, eds., Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics [M], Berlin: Springer Verlag, 2003.

30 Weickert J, ter Haar Romeny B M, Viergever M A. Efficient and reliable scheme for non-linear diffusion and filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, **7**(3):398 ~ 410.

31 Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation[J]. Journal of Computational Physics, 1988, **79**(1):12 ~ 49.

32 Li Jun, Yang Xin, Shi Peng-fei. A fast level set approach to image segmentation based on Mumford-Shah model[J], Chinese Journal of

Computers, 2002, **25**(11):1175 ~ 1183. [李俊,杨新,施鹏飞. 基于 Mumford-Shah 模型的快速水平集图象分割方法[J]. 计算机学报,2002, **25**(11): 1175 ~ 1183.]

33 Paragios N, Mellina-Gottardo O, Ramesh V. *Gradient vector flow fast geometric active contours*[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, **26**(3):402 ~ 407.

34 Ayed I B, Mitiche A, Belhadj Z. Multiregion level-set partitioning of *synthetic aperture radar images*[J]. *IEEE Transactions on Pattern* Analysis and Machine Intelligence, 2005, **27**(5):793 ~ 800.

35 Zhang Ji-wu, Zhang Dao-bing, Shi Shu-juan, *et al.* Digital chest image segmentation based on level set method[J]. Journal of Image and Graphics, 2004, **12**(12):1459 ~ 1465. [张继武, 张道兵, 史舒娟等. 基于水平集方法的数字胸片图像分割[J]. 中国图象图形学报, 2004, **12**(12):1459 ~ 1465.]

36 Huang Fu-zhen, Su Jian-bo. Face contour extraction and tracking using level sets[J]. Chinese Journal of Computers, 2003, **26**(4): 491 ~ 496. [黄福珍,苏剑波. 基于 Level Set 方法的人脸轮廓提取与跟踪[J]. 计算机学报, 2003, **26**(4):491 ~ 496.]

37 Xu Chenyang, Yezzi Anthony, Jerry L. On the relationship between parametric and geometric active contours[A]. In: Proceedings of 34th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers[M], Pacific Grove, CA, USA, 2000: 483 ~ 489.

38 Zhang Dan, Chen Gang. Image Processing Based on Partial Differential Equations[M]. Beijing: Higher Education Press, Aug, 2003. [张亶,陈刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京:高等教育出版社, 2003,8.]

39 Sapiro Guillermo. Geometric partial differential equations in image analysis: past, present and future [A]. In: Proceedings of International Conference on Image Processing[C], Washington, DC, USA, 1995, **3**:1 ~ 4.

40 Shi Cheng-xian, Wang Hong-yuan, Xia De-shen. Anisotropic diffusion filtering for image restoration on wavelet domain[J]. Journal of Image and Graphics, 2004, **9**(9):1439 ~ 1453. [石澄贤,王洪元,夏德深. 小波域上图像非线性扩散滤波[J]. 中国图象图形学报, 2004, **9**(9):1439 ~ 1453.]

41 Xu C, Prince J. Generalized gradient vector flow external forces for active contours[J]. Signal Processing, 1998, **71**(2):131 ~ 139.

42 Cootes T, Taylor C, Cooper D, *et al.* Active shape models—their training and application [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1995, **61**(1):38 ~ 59.

43 Zhu S, Yuille A. Region competition: Unifying Snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, **18**(9): 884 ~ 900.

44 Yezzi A, Tsai A, Willsky A. A statistical approach to Snakes for bimodal and trimodal imagery [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision[C], Kerkyra, Greece, 1999: 898 ~ 903.

45 Li Su-da, Zhang Xin-rong. The research of using Snake model to extract contours of objects in color images[J]. Journal of Image and Graphics, 2003, **8**(11):1266 ~ 1271. [李书达,张新荣. 应用 Snake 模型提取彩色图象目标轮廓线的研究[J]. 中国图象图形学报, 2003, **8**(11):1266 ~ 1271.]

本刊有关版权转让的声明